Université de Poitiers — Mathématiques

Devoir Surveillé du 6 Avril 1991

Agrégation externe 1990 - 1991

Composition d'analyse.

6203. Les résultats utilisés devront être énoncés avec précision. La rigueur des démonstrations et le soin apporté à leur rédaction seront des éléments importants d'appréciation.

1998

Les définitions et les notations introduites dans la partie I servent tout au long du problème.

Les parties II et III sont indépendantes.

On note **R** (Resp. **C**) le corps des réels (Resp. complexes). Il est supposé muni de la distance associée à la valeur absolue (Resp. le module).

Pour tout nombre complexe z, on note respectivement $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$ ses parties réelle et imaginaire, et $\bar{z}$ son conjugué.

On note

$\mathbf{R}_+$ l'ensemble $\{x | (x \in \mathbf{R})$ et $(x \geqslant 0)\}$,
$\mathbf{R}_-$ l'ensemble $\{x | (x \in \mathbf{R})$ et $(x \leqslant 0)\}$,
$\mathbf{R}^*$ l'ensemble $\{x | (x \in \mathbf{R})$ et $(x \neq 0)\}$,
$\mathbf{R}^*_+$ l'ensemble $\mathbf{R}_+ \cap \mathbf{R}^*$,
$\mathbf{R}^*_-$ l'ensemble $\mathbf{R}_- \cap \mathbf{R}^*$.

Tout espace vectoriel sur **C** est désigné par la même lettre que l'ensemble de ses éléments.

On note

E le **C**-espace vectoriel des applications continues de **R** dans **C**.
E_0 le sous-espace de E formé par les applications constantes.
E_1 le sous-espace de E formé par les applications nulles en chaque point de $\mathbf{R}_-$.
E_2 le sous-espace de E formé par les applications nulles en chaque point de $\mathbf{R}_+$.
Pour tout espace vectoriel V, 1_V désigne l'application identique de V.

Première partie.

1° Démontrer que E est somme directe de E_0, E_1 et E_2.

Pour α, β et γ, deux à deux distincts, éléments de $\{0, 1, 2\}$, on note $p_\alpha : E \to E$ l'endomorphisme de projection sur E_α parallèlement à $E_\beta \oplus E_\gamma$.

2° A tout élément f de E, on associe l'application $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \qquad g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(0) = f(0).$$

Démontrer que g appartient à E.

3° On note Φ le **C**-endomorphisme de E, qui a f associe g.

Φ est-il injectif ? Φ est-il surjectif ?

Un sous-espace F de E est dit stable par Φ si, et seulement si, $\Phi(F) \subset F$; dans ce cas, l'application de F dans F, induite par Φ, est un endomorphisme de F.

4° Démontrer que, pout tout élément α de $\{0, 1, 2\}$, E_α est stable par Φ et que $p_\alpha \circ \Phi = \Phi \circ p_\alpha$; on note alors Φ_α l'endomorphisme de E_α induit par Φ.

Deuxième partie.

1° Soit λ un nombre complexe non nul.

Déterminer toutes les applications dérivables f de $\mathbf{R}^*_+$ dans **C** vérifiant

$$\forall x \in \mathbf{R}^*_+, \qquad \lambda x f'(x) + (\lambda - 1) f(x) = 0.$$

2° Déterminer avec soin l'ensemble S des valeurs propres de Φ_1 (*cf.* I, 4°), puis l'ensemble T des valeurs propres de Φ. Représenter graphiquement, dans le plan complexe, les ensembles S et T ; on en précisera les points non intérieurs.

3° Pour tout λ dans S (Resp. T), on note E_1^λ (Resp. E^λ) le sous-espace propre de Φ_1 (Resp. Φ) associé à la valeur propre λ.

Pour tout λ dans S déterminer une base de E_1^λ.

Pour tout λ dans T déterminer une base de E^λ.

4° Pour tout λ dans S (Resp. T), pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $F_1^\lambda(n)$ [Resp. $F^\lambda(n)$] le sous-espace de E_1 (Resp. E) défini par

$$F_1^\lambda(n) = \operatorname{Ker}(\Phi_1 - \lambda\, 1_{E_1})^n \qquad (\text{Resp. } F^\lambda(n) = \operatorname{Ker}(\Phi - \lambda\, 1_E)^n).$$

On pose $F_1^\lambda = \bigcup_{n \geqslant 1} F_1^\lambda(n)$ et $F^\lambda = \bigcup_{n \geqslant 1} F^\lambda(n)$.

Pour tout λ dans S, déterminer une base de F_1^λ.
Pour tout λ dans T, déterminer une base de F^λ.

5° *a*) Soit λ un élément de S; déterminer tous les sous-espaces de F_1^λ stables par Φ_1.
En déduire une caractérisation de tous les sous-espaces de E_1 de dimension finie, stables par Φ_1.

b) Tout sous-espace H de E, de dimension finie, stable par Φ, est-il somme directe d'un sous-espace H_1 de E_1 et d'un sous-espace H_2 de E_2 stables par Φ ?

Troisième partie.

On note A, B et C les sous-espaces vectoriels de E suivants :

$$A = \{f \mid (f \in E) \quad \text{et} \quad (\lim_{x \to +\infty} f = 0) \quad \text{et} \quad (\lim_{x \to -\infty} f = 0)\},$$

$$B = \{f \mid (f \in E) \quad \text{et} \quad (f \text{ est uniformément continue sur } \mathbf{R})\},$$

$$C = \left\{f \mid (f \in E) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty\right\}.$$

1° Déterminer toutes les inclusions concernant les ensembles A, B et C. (On demande donc six démonstrations; chaque inclusion ou non-inclusion devant être justifiée.)

2° Comparer, toujours du point de vue de l'inclusion, A à $B \to C$.

3° Démontrer que, pout tout élément f de B, il existe un couple (a, b) de réels tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad |f(x)| \leqslant a|x| + b.$$

4° Les ensembles A, B, C, $A \cap C$ sont-ils stables par Φ ? Justifier chaque réponse par une démonstration.

Quatrième partie.

On note D l'ensemble $\left\{f \mid (f \in E) \text{ et } \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx < +\infty\right)\right\}$.

1° *a*) Prouver que D est un sous-espace vectoriel de E.

b) Comparer, du point de vue de l'inclusion, D à chacun des ensembles A, B et C (justifier chacune des six réponses).

2° Pour tout couple (f, g) d'éléments de D, on pose

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx.$$

Vérifier que la forme hermitienne $(f, g) \longmapsto \langle f \mid g \rangle$ est définie positive.

Pour tout élément f de D, on pose $\|f\| = \langle f \mid f \rangle^{\frac{1}{2}}$.

3° Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit f un élément de D, on pose $g = \Phi(f)$. Démontrer que

$$\int_a^b |g(x)|^2\, dx \leqslant a|g(a)|^2 + 2\left[\int_0^\infty |f(x)|^2\, dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

4° Démontrer que D est stable par Φ.

5° Démontrer que $\forall f \in D$, $\|\Phi(f)\|^2 = 2\mathrm{Re}\langle \Phi(f) \mid f \rangle$.

6° On munit D de la norme $\| \ \|$. On note Φ_D l'endomorphisme de D induit par Φ.

a) Prouver que Φ_D est continu et que, pour tout f dans D, on a $\|\Phi_D(f)\| \leqslant 2\|f\|$.

b) Démontrer que $\mathrm{Sup}\, \{\|\Phi_D(f)\| \mid (f \in D) \text{ et } (\|f\| = 1)\} = 2$.

7° Démontrer le résultat plus précis suivant : $(\forall f \in D)\ (f \neq 0 \Rightarrow \|\Phi_D(f)\| < 2\|f\|)$.